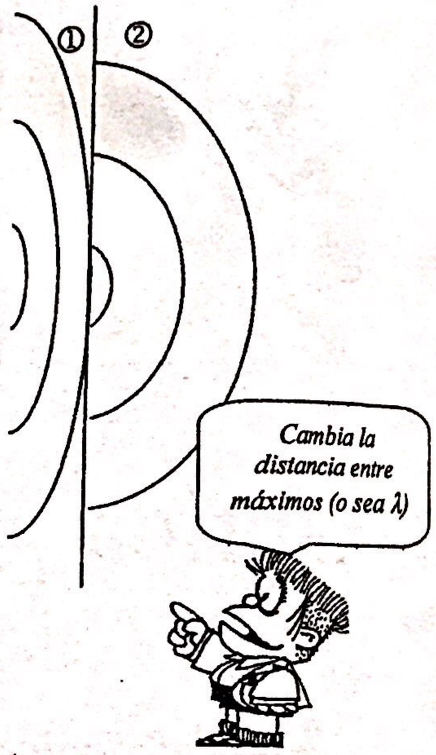
Óptica geométrica

1. ¿Cuáles de las siguientes propiedades de una onda varían y cuáles no en la refracción? (a) frecuencia, (b) longitud de onda, (c) velocidad de propagación, (d) dirección de propagación. Explique en cada caso.

Consideremos una onda que se propaga en el medio ①, e incide sobre una superficie que lo separa de otro medio ② (a esa superficie de cambio de medio se le da el nombre de dioptra), puede ocurrirle que consiga atravesarla y siga propagándose por el medio 2. A este fenómeno se le llama refracción. Las experiencias físicas demuestran que en esta situación, no cambia la frecuencia de la onda refractada, pero si lo hace su velocidad de propagación, su longitud de onda, y su dirección de propagación.



Ejemplos de esta situación son:

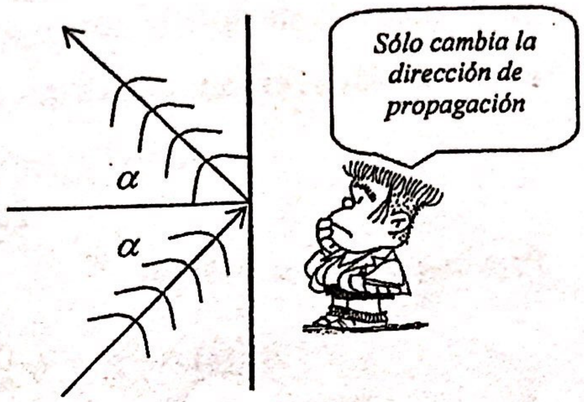
① el sonido: su velocidad de propagación depende de las propiedades del medio en que se propaga. En el cuadernillo anterior vimos que en al caso del aire su valor es aproximadamente de 340 *m/seg*

② la luz: su velocidad de propagación depende de las propiedades del medio en que se propaga, siendo máxima en el vacío ($\approx 3.10^8$ *m/seg*). La dirección o recta de propagación de la onda se desvía al cambiar de medio, según la ley de Snell que veremos en este cuadernillo.

2. ¿Cuáles de las siguientes propiedades de una onda varían y cuáles no en la reflexión? (a) frecuencia, (b) longitud de onda, (c) velocidad de propagación, (d) dirección de propagación, (e) fase. Explique su respuesta en cada caso.

En el caso que la onda incidente sobre la dioptra continúe por el medio incidente, decimos que se reflejo en la superficie.

En ese caso la onda mantiene su frecuencia, pero además, como continúa su propagación por el mismo medio que el incidente, su velocidad de propagación esta vez no cambia. Por lo tanto, de la expresión: $v_p = \lambda . f$ tampoco cambia la longitud de onda.

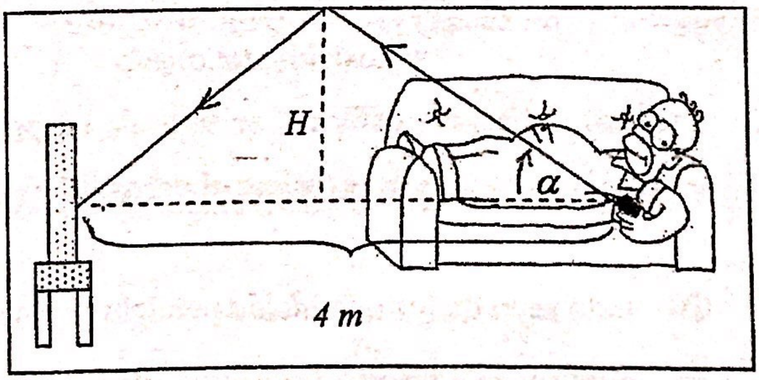


En cuanto a la dirección de propagación, se observa experimentalmente que en el caso de las ondas reflejadas la dirección de propagación de la onda incidente, la reflejada y la normal a la superficie son coplanares y que el ángulo α de la onda incidente con la normal coincide con el de la onda reflejada con la normal.

En cuanto al ángulo de fase de la ecuación de cada onda, se observa también que la *onda reflejada experimenta un salto de π.* Esto significa que si la onda incidente llega con un máximo en el momento de la reflexión, la reflejada sale con un mínimo.

3) Si en una habitación de 4mx4m y 2,5 m de altura, se intenta hacer funcionar el televisor con un control remoto haciendo que la radiación infrarroja incida en el techo, ¿con qué ángulo es óptimo enfocarlo si supongo que ambos, TV y control, están a 0,8m del suelo y en los extremos de la habitación?

Si analizo el dibujo vemos que el rayo sigue la trayectoria que se muestra en la figura, y al rebotar en el techo el ángulo de reflexión coincide con el de incidencia (ley de reflexión).



El ángulo α óptimo es aquel que logra que el rayo reflejado que dibujamos incida directamente sobre la tele. Como se observa en la figura, tenemos un triángulo rectángulo ABC, donde la altura H (el cateto opuesto del α) es el resultado de restar la altura del techo menos la altura respecto al piso que se encuentran la TV y el control remoto:

$$2{,}5\ \text{m} - 0{,}8\ \text{m} = 1{,}7\ \text{m}$$

Para este ángulo α tenemos:

$$tg(\alpha) = \frac{op}{ady} = \frac{1{,}7\ m}{2\ m} = 0{,}85 \xrightarrow{despejo} \alpha = 40{,}36^\circ$$

Espejos esféricos

IMPORTANTE: las fórmulas que vamos a usar para resolver los problemas son las que corresponden a la convención de signos que propone la guía, aunque algunos profesores no la usan, y tampoco lo hacen así en muchos textos. Pero en la presente guía se pide esta convención para uniformar, lo cual me parece una gran idea, porque después en los exámenes se arma lío con lo que dicen los enunciados y lo que uno usó en casa. Por eso, adhiero fervorosamente a la idea de que todos nos pongamos de acuerdo en esto. Y resuelvo en consecuencia. Pero si uno estudió de otro lado, puede ocurrir que las fórmulas lleven algún signo cambiado.

Todas las posiciones se miden desde el punto O, que es la intersección del espejo con el eje óptico. Llamamos:

x = posición del objeto ; x' = posición de la imagen

f = foco del espejo esférico, se trata de un punto ubicado en la mitad de camino entre el centro de curvatura del espejo y el origen O. Este punto tiene dos propiedades importantes:

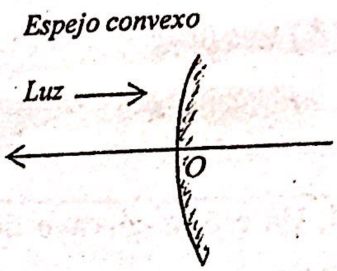
① todo rayo de luz que incide paralelo al eje se refleja en la dirección del foco.

② todo rayo de luz que pasa por el foco se refleja en la dirección del foco.

Las fórmulas que relacionan las posiciones del objeto, la imagen que da el objeto, y el foco o el radio del espejo, son:

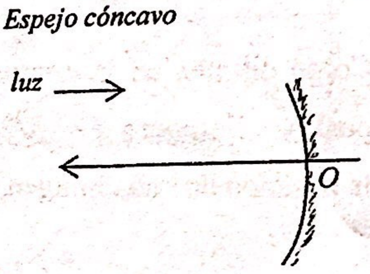
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f} \qquad (f=\tfrac{R}{2})$$

Para el agrandamiento: $A=\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{x'}{x}$



Convención de signos:

- Elijo que la luz viene de la izquierda
- Las posiciones se miden desde O, hacia la izquierda son positivas.
- Las alturas se miden desde el eje: son positivas cuando el objeto o la imagen están arriba del eje óptico



- La foco o el radio del espejo es positivo para los cóncavos, y negativos para los convexos.

En cuanto a los trazados de rayos para la obtención de la imagen en forma gráfica; se consideran tres rayos principales:

① todo rayo paralelo al eje, se refleja en el espejo en la dirección de la recta al foco

② todo rayo que incide en la dirección del foco se refleja en el espejo en la dirección paralela al eje

③ todo rayo que incide en la dirección del centro de curvatura, se refleja sin desviarse.

Por último:

Un objeto real es aquel para el cual x es positivo ✓

(♙) La imagen es real si x' es positiva (o gráficamente se obtiene por intersección directa de los rayos emergentes) ✓

(♙) La imagen es virtual si x' es negativa (o gráficamente se obtiene por intersección de las prolongaciones de los rayos emergentes) ✓

(♙) Una imagen es derecha si y' tiene el mismo signo que y ✓

(♙) Una imagen es invertida si y' tiene el signo contrario que y ✓

4. Un espejo cóncavo tiene un radio de 1,00m. Calcule la posición de la imagen de un objeto y su aumento si el objeto real está a una distancia del espejo igual a (a) 1,40m (b) 1,00 m (c) 0,80 m (d) 0,50 m y (e) 0,30m. ¿Qué sucede si el objeto es virtual?

Como dijimos en la convención de signos, un espejo cóncavo tiene posición del foco f positivo. Entonces $f = R/2 = 0{,}5$ m. Despejamos en la fórmula de Descartes para encontrar la posición de cada imagen, usando en todos los casos que x es positivo (objeto real)

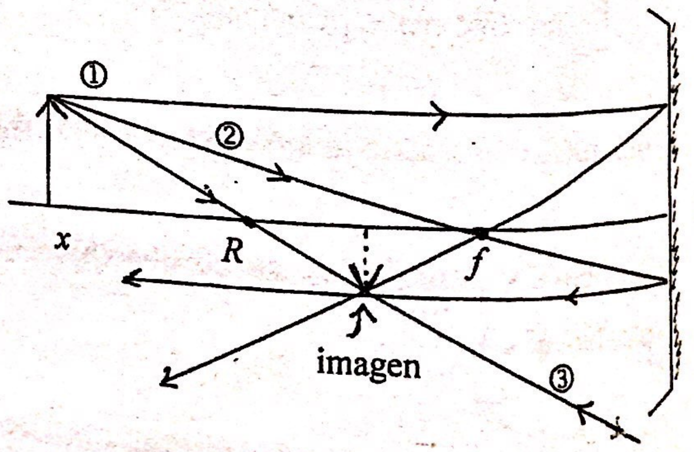
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f} \;\rightarrow\; \frac{1}{x'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{x}=\frac{x-f}{f\,x} \xrightarrow{\text{invierto}} x'=\frac{f\,x}{x-f}$$

Tenemos para cada caso:

$x = 1{,}4$ m

$$x'=\frac{f\,x}{x-f}=\frac{0{,}5\,m\,.\,1{,}4\,m}{1{,}4\,m-0{,}5\,m}=0{,}\widehat{7}\,m$$

$$A=-\frac{x'}{x}=-\frac{0{,}\widehat{7}\,m}{1{,}4\,m}=-0{,}\widehat{5}$$

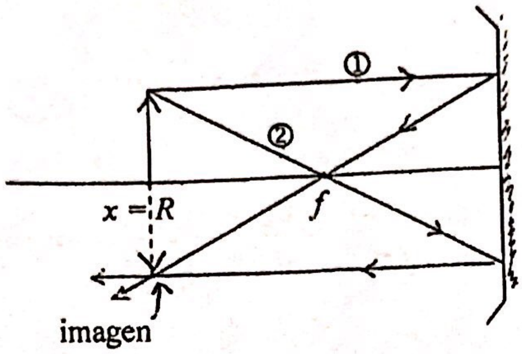


Como x' es positivo, la imagen es real. Como el agrandamiento da menor que 1 la imagen es menor, y como el agrandamiento es negativo, la imagen es invertida.

$x = 1$ m

$$x' = \frac{f\,x}{x-f} = \frac{0{,}5\ m \, . \, 1m}{1m - 0{,}5\,m} = 1\,m$$

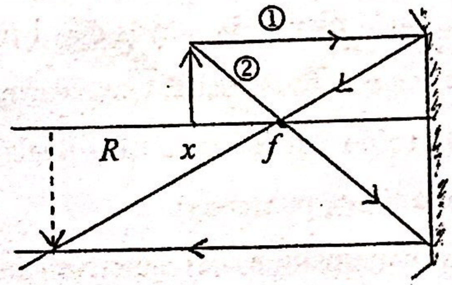
$$A = -\frac{x'}{x} = -\frac{1\ m}{1\ m} = -1$$



Como x' es positivo, la imagen es real. Como el módulo del agrandamiento vale "1" la imagen es del mismo tamaño que el objeto, y como es negativo, la imagen es invertida.

$x = 0{,}8$ m

$$x' = \frac{f\,x}{x-f} = \frac{0{,}5\ m \, . \, 0{,}8m}{0{,}8m - 0{,}5\,m} = 1{,}\widehat{3}\,m$$

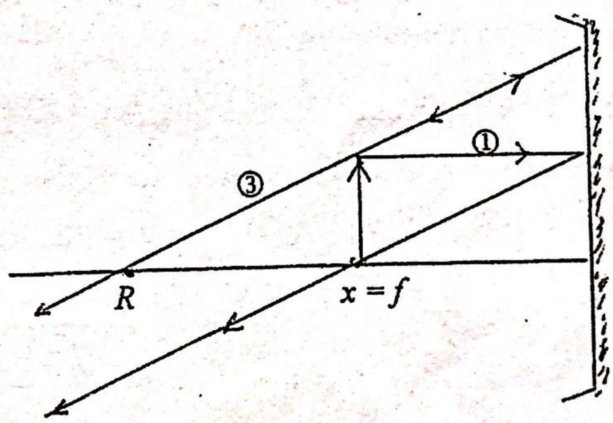


$$A = -\frac{x'}{x} = -\frac{1{,}\widehat{3}\ m}{0{,}8\ m} = -1{,}\widehat{6}$$

Como x' es positivo, la imagen es real. Como el módulo del agrandamiento da mayor que uno, la imagen es más grande que el objeto, y como es negativo, la imagen es invertida.

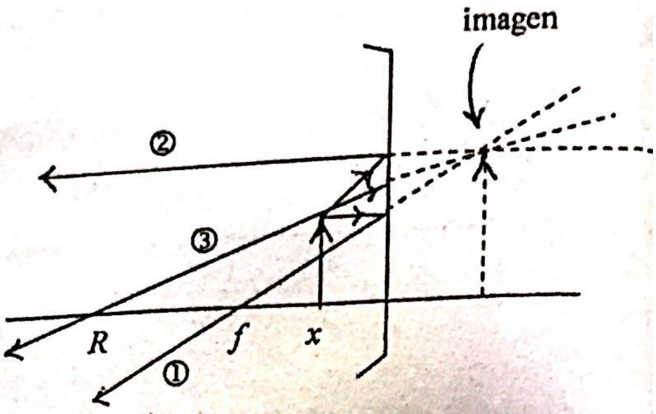
$x = 0{,}5$ m

$$x' = \frac{f\,x}{x-f} = \frac{0{,}5\ m \, . \, 0{,}5m}{0{,}5m - 0{,}5\,m} = \infty$$



En este caso, con el objeto ubicado sobre el foco, la imagen se forma en el infinito. No tiene sentido hablar de sus características ni tamaño. Observar que en el trazado de rayos, el rayo ① es paralelo al ③, y el ② no puede trazarse

$x = 0{,}3\ \text{m}$



$$x' = \frac{f\,x}{x-f} = \frac{0{,}5\ m\ .\ 0{,}3m}{0{,}3m - 0{,}5m} = -0{,}75m$$

$$A = -\frac{x'}{x} = -\frac{-0{,}75\ m}{0{,}3\ m} = +2{,}5$$

Como x' es negativo, la imagen es virtual. En consecuencia, al hacer el trazado de rayos, los mismos debieron prolongarse para sacar su intersección. Como el módulo del agrandamiento da mayor que 1 la imagen es más grande que el objeto, y como es positivo, la imagen es derecha. Observar que en este caso para trazar el rayo ② (el que emerge en la dirección del foco) se saca hacia el espejo pero la recta dirección de ese rayo pasa por el foco (línea punteada).

Las conclusiones del ejercicio son que para objetos reales, un espejo cóncavo puede dar:

- imagen real, invertida y menor si el objeto está a una distancia $x > 2.f$
- imagen real, invertida y mayor si el objeto está a una distancia $f < x < 2.f$
- imagen virtual, derecha y mayor si el objeto está a una distancia $x < f$

En el caso que el objeto sea virtual (es decir $x < 0$), la posición de su imagen será siempre positiva. En efecto, del despeje que hicimos es fácil ver que el signo es:

$$x' = \frac{\overbrace{f}^{+}\,.\,\overbrace{x}^{-}}{\underbrace{x}_{-} - \underbrace{f}_{+}} = \frac{-}{-} > 0$$

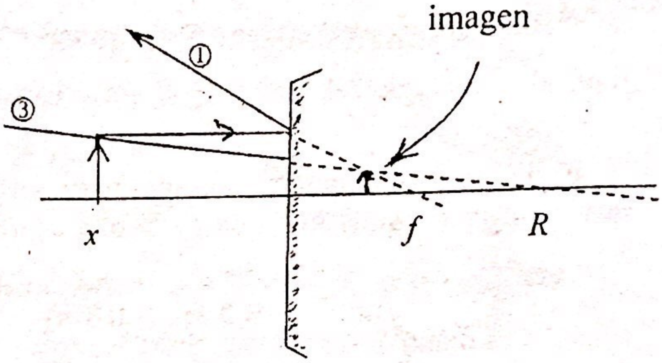
Por lo tanto, para el caso de objeto virtual, la imagen es siempre real. De la expresión del agrandamiento se puede ver asimismo que la imagen es siempre derecha ($A > 0$).

5. Un espejo convexo tiene un radio de 1,00m (a) calcule la posición de la imagen de un objeto y el aumento si la distancia del objeto al espejo es de 0,6 m. Considere también un objeto virtual a una distancia de (b) 0,3 m y (c) 0.8 m

Como dijimos en la convención de signos, un espejo convexo tiene una posición focal f negativa. Entonces $f = R/2$ = -0,5 m. Despejamos en la fórmula de Descartes para encontrar la posición de la imagen:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x} = \frac{x-f}{f.x} \quad \xrightarrow{\text{invierto}} \quad x' = \frac{f.x}{x-f}$$

Usando que x es positivo (objeto real) x = 0,6 m



$$x' = \frac{f.x}{x-f} = \frac{-0{,}5\ m\ .\ 0{,}6m}{0{,}6m-(-0{,}5m)} \cong -0{,}273m$$

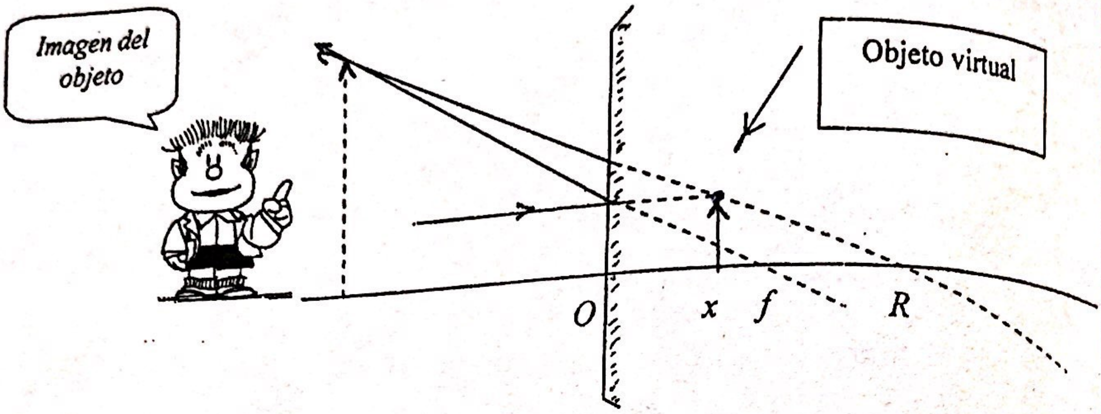
$$A = -\frac{x'}{x} = -\frac{-0{,}273\ m}{0{,}6\ m} \cong +0{,}45$$

Como x' es negativo, la imagen es virtual. Como el agrandamiento da menor que 1 la imagen es menor, y como el agrandamiento es positivo, la imagen es derecha. Para el trazado de rayos observar que como el foco y el centro de curvatura R están detrás del espejo, los rayos que se emiten en la dirección del foco y del centro deben prolongarse con una línea punteada (por claridad, se omitió el rayo el trazado del rayo ②)

b) para el caso de un objeto virtual, según nuestra convención de signo debemos considerar x negativo. En la fórmula de Descartes:

$$x' = \frac{f.x}{x-f} = \frac{-0{,}5\ m\ .\ (-0{,}3m)}{(-0{,}3m)-(-0{,}5m)} = 0{,}75m \qquad A = -\frac{x'}{x} = -\frac{0{,}75}{(-0{,}3\ m)} = 2{,}5$$

Como sabemos, el signo de la posición imagen x' significa que la misma es real, mientras que por el del agrandamiento sabemos que es derecha. Además es dos veces y media mayor que el objeto. Para el trazado de rayos conviene notar que los rayos incidentes deb provenir de la izquierda, aunque el objeto virtual se encuentre a la derecha del espejo. P lo tanto los rayos incidentes son marcados como mostramos en el dibujo, de forma que s prolongaciones pasan por el objeto virtual ubicado en x.



c) de la misma manera para un objeto virtual ubicado en x = -0,8 m

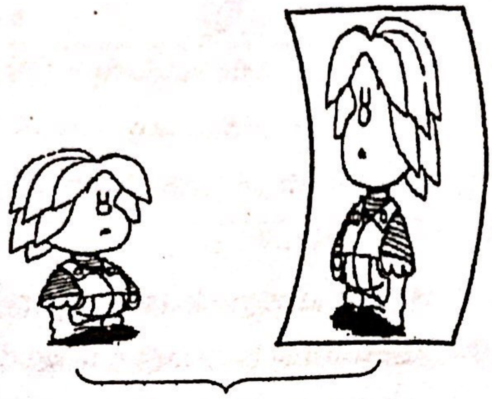
$$x' = \frac{f.x}{x-f} = \frac{-0{,}5\ m\ .\ (-0{,}8\,m)}{(-0{,}8\,m)-(-0{,}5\,m)} = -1{,}\hat{3}\,m \quad \rightarrow \quad A = -\frac{x'}{x} = -\frac{(-1{,}\hat{3}\ m)}{(-0{,}8\ m)} = -1{,}\hat{6}$$

Por lo tanto la imagen es virtual ($x' < 0$), invertida ($A < 0$) y de mayor tamaño que el objet ($|A| > 1$)

6. Un espejo cóncavo tiene una distancia focal de 15 cm. (a) Encuentre la distancia óptima a la que una persona debe estar del espejo si la distancia de visión clara es de 25 cm. (b) Calcule el aumento.

Este problema merece varias explicaciones: la distancia de visión clara es la menor distancia a la que el ojo humano puede enfocar. Si pegás la hoja de este apunte a tu ojo (digamos un par de centímetros, y hay que cerrar el otro para no hacer trampa al enfocar), vas a ver que por más que lo intentes es imposible de leer. Cuando alejas despacio el apunte vas a notar que en algún punto se consigue ver, ya que el ojo empieza a enfocar. Esta distancia se llama distancia de visión clara y es del orden de 25 cm (para una persona joven es algo menor).

La cosa es así: una persona está delante de un espejo cóncavo (es un objeto real). La imagen se forma detrás del espejo, por lo tanto es virtual. La idea es que entre esa imagen y la persona (o sea el objeto) haya una distancia de por lo menos 25 *cm* (para que la persona pueda enfocar con nitidez su imagen).



distancia objeto-imagen = 25 cm

Recordemos de lo que vimos en el ejercicio 4 que para un espejo de estas características la imagen es virtual cuando el objeto está ubicado a una distancia menor que el foco (en nuestro caso a menos de 15 *cm*). La distancia entre la posición del objeto x y la de la imagen x', se puede poner como $|x|+|x'|=25\ cm$

Pero como x es positiva (objeto real) mientras que x' es negativa (imagen virtual), esta condición puede ponerse sacando los módulos como: $x-x'=25\ cm$ ó $x'=x-25\,cm$

Podemos reemplazar en la fórmula de los espejos esféricos (recordar que como es cóncavo en nuestra convención de signos la distancia focal es positiva)

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-25} \xrightarrow{\text{común divisor}} \frac{1}{15}=\frac{x-25+x}{x.(x-25)} \rightarrow x.(x-25)=15.(2.x-25)$$

$$x^2-25x=30x-375 \quad \rightarrow \quad x^2-55x+375=0 \xrightarrow{\text{cuadrática}} \begin{cases} x_1 \cong 47\,cm \\ x_2 \cong 8\,cm \end{cases}$$

De las dos soluciones matemáticas sólo me sirve la 2da, ya que como dijimos el objeto (la persona) debe estar ubicada en una posición entre el espejo y el foco.

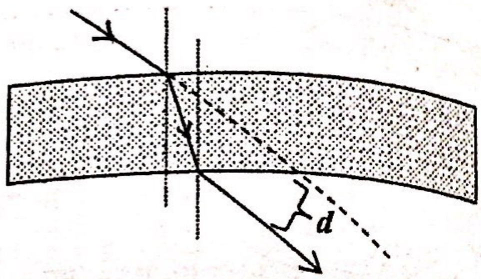
La posición de la imagen se puede sacar de la ecuación de lentes, aunque es mucho más fácil hacerlo de la condición $x'=x-25\,cm \cong -17\ cm$. Como sabemos, el signo menos indica que esta imagen es virtual. Por último, veamos el aumento:

$$A=-\frac{x'}{x}=-\frac{-17\ cm}{8\ cm}\cong +2{,}1$$

Como vemos, la imagen es mayor y derecha.

7. Una placa de vidrio (n = 1,6) con dos lados paralelos tienen 8 cm de grueso. (a) Calcul el desplazamiento lateral de un rayo de luz cuyo ángulo de incidencia es de 45º. (b) Use e método del problema 5 para dibujar la trayectoria del rayo.

Cuado un rayo de luz incide sobre un vidrio de caras paralelas, emerge luego de refractar en la 2da cara en una dirección paralela a la dirección de incidencia.



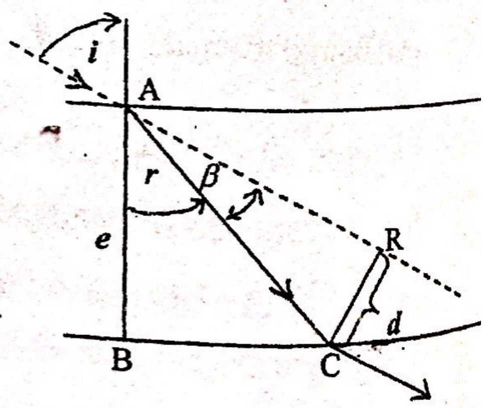
Existe por lo tanto un desplazamiento *d* entre ambas rectas.

Esto es así porque ocurren dos refracciones, una en cada cara, para la primera el ángulo se acerca a la normal (porque $n_v > n_{aire}$ como explicamos en ②), mientras que para la segun refracción ocurre al revés, el rayo incide desde el vidrio, y pasa al aire alejándose de normal.

Para hacer la cuenta de la desviación, debemos plantear la 1ra refracción y un poco trigonometría para relacionar e; espesor del vidrio con *d*. Planteamos la 1ra refracci usando la ley de Snell, con $n_{aire} = 1$:

$$sen(45°) = 1{,}5.sen(r) \rightarrow sen(r) \cong 0{,}4714 \rightarrow \hat{r} \cong 28{,}13°$$

Para este ángulo de refracción, el rayo refractado dentro de la lámina sigue el camino marcado en línea completa. La línea punteada en el dibujo es la continuación del rayo incidente. Observemos en el dibujo que el rayo refractado forma un triángulo ABC, donde el espesor *e* de la lámina es el cateto adyacente al ángulo de refracción *r*. Por trigonometría:



$$\cos(r) = \frac{AB}{AC} \rightarrow AC = \frac{AB}{\cos(r)} = \frac{e}{\cos(r)}$$

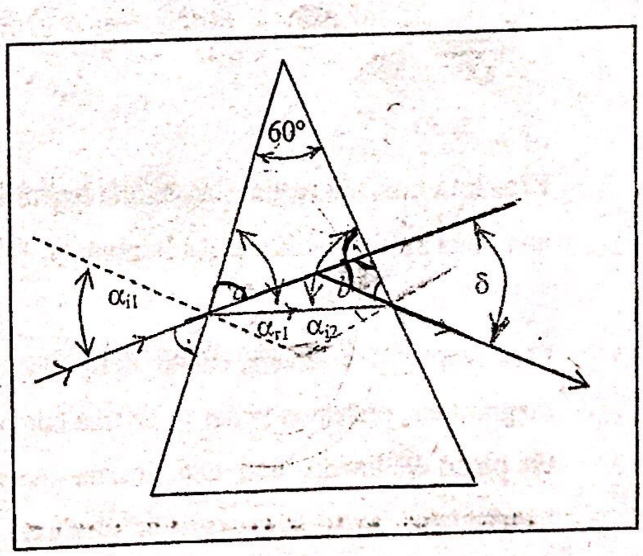
Observemos también que este lado es la hipotenusa del triángulo ACR. El ángulo opuesto β, como se muestra en el dibujo de la página anterior, es la diferencia entre el de incidencia i con el refractado r. Observar también que el ángulo del vértice R es recto ya que la distancia d debe ser tomada en forma ***perpendicular*** a la línea punteada del rayo original. Por lo tanto, usando nuevamente trigonometría para el triángulo ACR:

$$sen(\overbrace{i-r}^{\beta}) = \frac{CR}{AC} \rightarrow \underbrace{CR}_{d} = \underbrace{\frac{e}{\cos(r)}}_{AC} . sen(i-r)$$

$$d = \frac{8\ cm}{\cos(28{,}13)} . sen(45 - 28{,}13) \cong 2{,}63\ cm$$

8. Un prisma tiene un índice de refracción de 1,5 y un ángulo de 60°. (a) determine la desviación de un rayo que incide con un ángulo de 40° (b) Encuentre la desviación mínima y el correspondiente ángulo de incidencia

Cuando un rayo de luz incide en la cara de un prisma sufre dos refracciones, la primera al ingresar al prisma y la segunda al salir. El ángulo de desviación δ es el que se forma entre la dirección del incidente y el de salida.



En el dibujo se marcaron una serie de ángulos auxiliares que nos servirán para determinar relaciones entre los que tenemos y los que necesitamos.

(a) tomemos la primera refracción, usando como ángulo de incidencia $\alpha = 40°$ en la ley Snell, y poniendo horizontal la cara del prisma sobre la que se efectúa la incidencia

$$\underbrace{n_{aire}}_{1} . sen(40°) = \underbrace{n_{vidrio}}_{1,5} . sen(\alpha_{r,1}) \xrightarrow{despejo} \alpha_{r,1} = 25,4°$$

Este ángulo se relaciona con el de incidencia en la 2^{da} cara $\alpha_{i,2}$ y el del prisma. En efec si miramos el dibujo del prisma, se tiene que por suma de ángulos internos de un triángul

$$60° + \hat{a} + \hat{b} = 180°$$

Pero por otra parte, observar que los ángulos auxiliares $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son complementarios (ángulo de la 1^{ra} refracción ($\alpha_{r,1} = 25,4$) y el de la 2^{da} incidencia ($\alpha_{i,2}$):

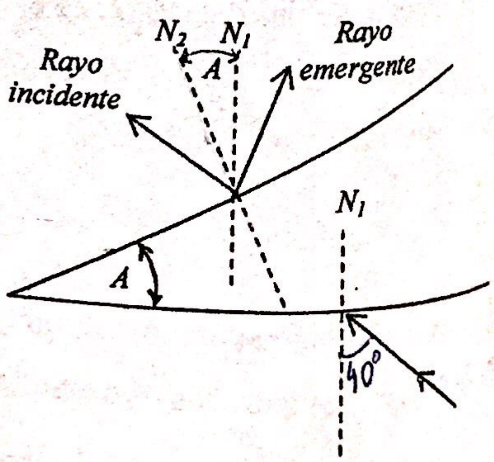
$$60° + (90° - \alpha_{r,1}) + (90° - \alpha_{i,2}) = 180° \xrightarrow{despejo} \alpha_{i,2} = 60° - \alpha_{r,1} = 34,6°$$

Finalmente, volvemos a plantear la ley de Snell:

$$\underbrace{n_{vidrio}}_{1,5} . sen(34,6°) = \underbrace{n_{aire}}_{1} . sen(\alpha_{r,2}) \xrightarrow{despejo} \alpha_{r,2} = 58,4°$$

Pero esta no es la respuesta, ya que tenemos el ángulo que resulta de la 2^{da} refracción per aun no el de desviación δ que buscamos.

Para ver que relación existe entre estas magnitudes, podemos poner al prisma como un plano inclinado, con una de sus caras horizontales, como te muestro en el dibujo. Vemos que las dos líneas punteadas son las Normales a cada cara, y el ángulo entre ellas es el A del prisma.



Además el ángulo que forma el rayo incidente con la vertical es el ángulo de incidencia $\alpha_{i,1} = 40°$, y el que forma la normal N_2 con el emergente es $\alpha_{r,2} = 58,4°$

Se puede ver que el ángulo de desviación es la suma de $\alpha_{i,1}$ más $\alpha_{r,2}$, pero debemos descontarle el ángulo entre las normales (que en la suma está contado dos veces):

$$\delta = \alpha_{i,1} + \alpha_{r,2} - A$$

Esta relación es general, el ángulo que está restando es el que forman las normales entre sí, es decir el ángulo del prisma. Reemplazando con nuestros resultados:

$$\delta = 40° + 58,4° - 60° = 38,4°$$

b) en el caso anterior vimos que cuando se incide sobre una cara del prisma el rayo se desvía. El ángulo de esta desviación δ cambia según la orientación del rayo incidente, y se verifica que para cierto ángulo crítico la desviación es mínima. Ese ángulo de incidencia α_{min} es aquel en que la desviación es simétrica en cada cara (es decir, en cada cara la desviación es la mitad de δ). Para ese ángulo crítico se tiene la relación:

$$\alpha_{min} = \frac{A + \delta_{min}}{2} \quad \text{y} \quad n = \frac{sen(\alpha_{\min})}{sen(\frac{A}{2})} \quad ó \quad n = \frac{sen\left[\frac{A + \delta_{\min}}{2}\right]}{sen(\frac{A}{2})}$$

Donde A es el ángulo del prisma (60°). Esta relación nos permite despejar:

$$1,5 = \frac{sen\left[\frac{60 + \delta_{\min}}{2}\right]}{sen(30)} \rightarrow \frac{60 + \delta_{\min}}{2} = \underbrace{arcsen(0,75)}_{48,6°}$$

$$\rightarrow \quad \delta_{\min} = 2.48{,}6° - 60° \cong 37{,}2° \quad \rightarrow \quad \alpha_{min} = \frac{A+\delta_{\min}}{2} \xrightarrow{cuenta} \alpha_{min} = 48{,}6°$$

9. La desviación mínima de un prisma es de 30°. El ángulo es de 50°. Encuentre (a) su índice de refracción, (b) La incerteza absoluta, relativa y porcentual de dicho índice y (c) el ángulo de incidencia para la mínima desviación.

Despejamos de la relación que dimos en el problema anterior:

$$n = \frac{sen\left[\frac{A+\delta_{\min}}{2}\right]}{sen(\frac{A}{2})} = \frac{sen\left[\frac{50+30}{2}\right]}{sen(\frac{50}{2})} \xrightarrow{cuenta} n = 1{,}52$$

La incerteza absoluta se saca derivando la expresión del n respecto a las dos variables que se miden: los ángulos A del prisma y δ_{min} (para los que no cursaron Análisis 2, preguntarle a un compañero):

- derivo respecto de A:

$$\frac{\partial n}{\partial A} = \frac{\cos\left[\frac{A+\delta_{\min}}{2}\right].\frac{1}{2}.sen(\frac{A}{2}) - sen\left[\frac{A+\delta_{\min}}{2}\right].\cos(\frac{A}{2}).\frac{1}{2}}{\left(sen(\frac{A}{2})\right)^2}$$

$$\xrightarrow{A=50\,;\ \delta=30} \frac{\partial n}{\partial A} \cong -0{,}725$$

- derivo respecto de δ_{min}:

$$\frac{\partial n}{\partial \delta_m} = \frac{\cos\left[\frac{A+\delta_{\min}}{2}\right].\frac{1}{2}}{sen(\frac{A}{2})} \xrightarrow{A=50\,;\ \delta=30} \frac{\partial n}{\partial \delta_m} \cong 0{,}906$$

Por lo tanto, la expresión de la incerteza absoluta, considerando que el error de cada variable es $1° = \frac{\Pi}{180}$ rad. (se toma la menor unidad informada en cada dato), nos queda:

$$\Delta n = \left|\frac{\partial n}{\partial A}\right| . \left|\Delta A\right| + \left|\frac{\partial n}{\partial \delta_m}\right| . \left|\Delta \delta_m\right| \cong 0{,}725 . \tfrac{\Pi}{180} + 0{,}906 . \tfrac{\Pi}{180} \cong 0{,}03$$

La incerteza relativa será:

$$e_n = \frac{\Delta n}{n} = \frac{0{,}03}{1{,}52} \cong 0{,}02 \qquad \rightarrow \qquad e_{\%} = 2\ \%$$

c) el ángulo de incidencia para la desviación mínima se saca con la expresión del problema anterior:

$$\alpha_{min} = \frac{A + \delta_{min}}{2} = \frac{50 + 30}{2} = 40°$$

10. Indique cuáles imágenes son reales y cuáles virtuales: (a) nuestra propia imagen vista en un espejo plano; (b) la imagen de un objeto visto a través de una lupa; (c) la imagen proyectada en una pantalla por un proyector de cine o diapositivas; (d) la imagen de un objeto proyectada por la lente del ojo en la retina; (e) la imagen producida en una película por la lente objetivo de una cámara; (f) la imagen de un objeto vista a través de un microscopio o un telescopio.

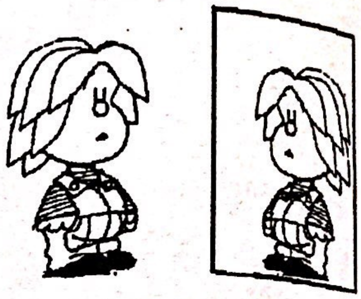
Observación: el problema es difícil de discutir sin que hayamos planteado ninguno de lentes. Por eso conviene que le des un vistazo cuando hayas terminado la práctica.

Definimos la imagen (de un objeto dado por algún sistema) como real si se obtiene como intersección directa de los rayos emergentes del sistema. Como regla práctica se puede decir que toda imagen que pueda ponerse o proyectarse en una pantalla es real.

En cambio, la imagen es virtual si los rayos emergentes no se intersecan (se separan, pe parecen provenir de un punto detrás del sistema).

Es importante recordar la definición de cada tipo de imagen y no asociarlo con cosa extrañas. Un concepto bastante común (y erróneo) es creer que la palabra real refiere a qu se puede o no se puede ver. La verdad es que eso sólo consigue complicar las cosas, porqu el ojo humano es un sistema óptico que permite enfocar cosas reales y virtuales, com vamos a ver.

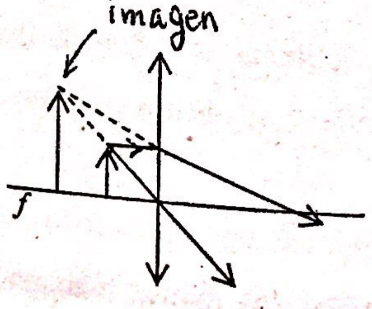
(a) nuestra propia imagen en un espejo plano es un ejemplo de imagen virtual. Sabemos que en realidad la luz que luego de incidir, emerge del espejo, son rayos que se separan. La luz de la imagen parece provenir detrás del espejo. Estos rayos son imposibles de juntar sobre una pantalla. Para dibujar esta situación se pone una fuente puntual de luz (un fósforo encendido).



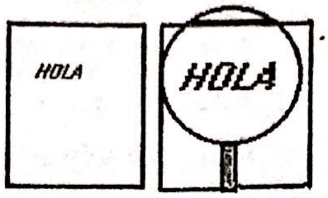
Los rayos se reflejan y luego de desviarse en el espejo, parecen provenir de detrás del mismo (que es el lugar donde nuestro ojo cree que se encuentra el fósforo, en realidad allí está la imagen)

b) la imagen de un objeto a través de una lupa es un caso de los dos tipos. Como vamos a ver más adelante las lentes convergentes (como la lupa) forman imágenes virtuales y reales Aconsejo volver este análisis después de resolver los ejercicios de la guía.

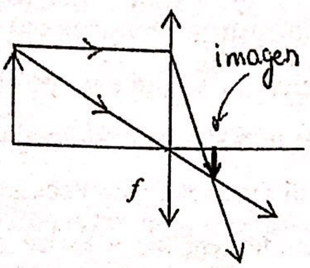
- En el 1[er] caso se trata de objetos cercanos a la lupa, a una distancia menor que el foco: la imagen formada es derecha y de tamaño mayor.



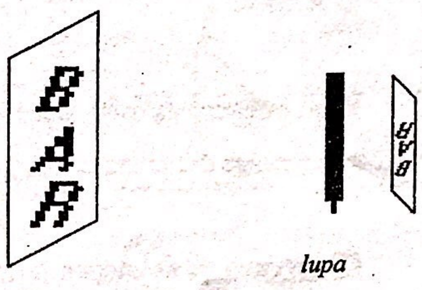
Este es el uso común que se le da a la lupa, el objeto se acerca a la lupa y el resultado es una imagen mayor que el tamaño real del objeto, y por supuesto derecha.



- En el 2do caso se trata de objetos lejanos a la lupa, a una distancia mucho mayor que el foco: la imagen formada es invertida y de tamaño menor.



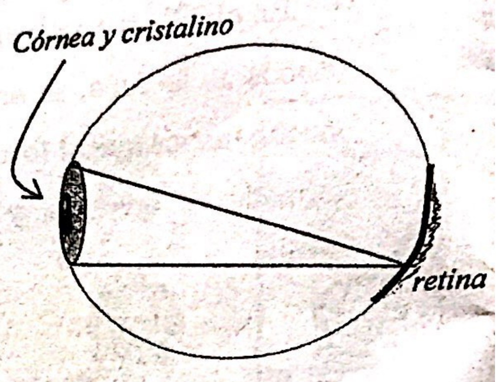
En este caso la imagen del objeto es "real" y mucho menor, se encuentra invertida y se puede poner sobre una pantalla (por ejemplo una hoja de papel en blanco). Si tenemos un objeto lejano que emite luz (por ejemplo un cartel luminoso) la imagen que forma la lupa es muy pequeña y tiene estas características.



Tanto la imagen del caso anterior como la de este pueden ser vistas por el ojo, aunque en este caso es necesario que el ojo se ubique detrás de la posición donde se forma la imagen. Si conseguís una lupa se puede hacer la experiencia, mirando objetos lejanos a través de la lupa, y si la dejamos lejos del ojo (de manera que éste se encuentre detrás de la imagen) se verá una imagen chiquita y dada vuelta. Por este motivo no conviene decir que las imágenes reales el ojo no las puede ver; el ojo "ve" todo lo que tiene por delante. Sólo no puede "ver" las imágenes reales formadas por detrás de él.

c) Estas imágenes son reales ya que se pueden proyectar sobre una pantalla, resultan de intersección directa de los rayos emergentes que salen del proyector. Te cuento que est sistemas de proyección son lentes convergentes, donde el objeto es ubicado por detrás d foco, pero muy cerca del mismo. El resultado es una imagen real, mayor que el objeto, invertida (por eso los inexpertos siempre ponen la diapositiva derecha y en la pantalla l aparece invertida)

d) También la imagen que forma el ojo es real. El ojo es un sistema óptico formado por dos lentes convergentes (la córnea y el cristalino) que forma una imagen en el fondo del globo ocular donde se encuentra un tejido sensible a la luz (la retina) que está conectado mediante el nervio óptico con el cerebro.



Esta imagen es real porque está formada por la intersección directa de los rayos emergentes del cristalino (o porque se forman sobre una pantalla: la retina)

Observación: la imagen formada por el ojo sobre la retina es invertida (como la de la lupa para cosas lejanas). Esto exige un entrenamiento del cerebro para interpretar lo que se "ve". En los primeros meses de vida el bebé entrena esta situación hasta que lograr entender que la imagen está invertida.

(e) también la imagen formada por una cámara fotográfica es una imagen real, se proyecta sobre una pantalla (el film donde se forma el negativo). La situación es muy parecida a la que dimos para la lupa cuando se toman imágenes de objetos lejanos.

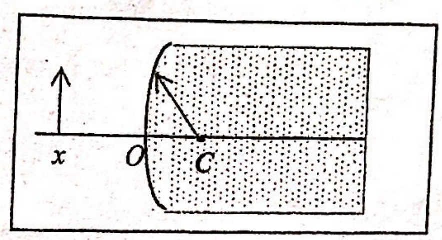
Observación: la imagen formada por la cámara fotográfica también está invertida. Cualquier laboratorio que revele rollos fotográficos te lo puede confirmar.

(f) en general estas imágenes son virtuales, no se las puede poner sobre una pantalla y parecen provenir de detrás del instrumento. La descripción del sistema óptico que integra estos instrumentos es compleja, pero algo veremos en próximos problemas.

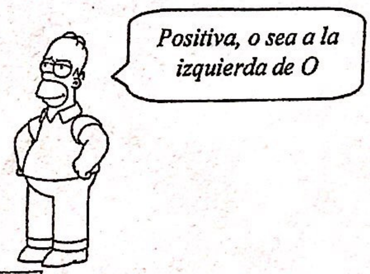
11. Una varilla de vidrio de 40 cm de largo tiene un extremo plano y el otro en forma de superficie esférica convexa de 12 cm de radio. Se coloca un objeto en el eje de la varilla a 10 cm del extremo redondeado. (a) ¿Cuál es la posición de la imagen final? (b) ¿Cuál es su aumento? Suponga que el índice de refracción es de 1,50. (c) ¿Cómo afecta la precisión del resultado si considera que el índice es 1,5 en vez de 1,50? Tenga en cuenta los criterios de la teoría de la Medida.

Para resolver este ejercicio vamos a usar las fórmulas y la convención de signos que damos en el ejercicio 14, que se encuentra al final del apunte.

Hacemos la primera refracción sobre la dioptra esférica convexa, donde el medio del que incide la luz se supone que es aire (n = 1). Para eso tengamos en cuenta que, como vimos en la convención de signos, el radio es negativo:



$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R} \xrightarrow{\textit{reemplazo}} \frac{1{,}5}{x'} - \frac{1}{10\ cm} = \frac{1{,}5 - 1}{-12\ cm} \xrightarrow{\textit{cuentas}}$$



$$\frac{1{,}5}{x'} = -0{,}041\widehat{6} + 0{,}1 \rightarrow \quad x' = \frac{1{,}5}{0{,}5833}\ cm \cong 25{,}7\ cm$$

Y el aumento de esta primera refracción será: $A = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 . x'}{n_2 . x} = \frac{1.(25{,}7\,cm)}{1{,}5.(10\,cm)} \cong 1{,}7$

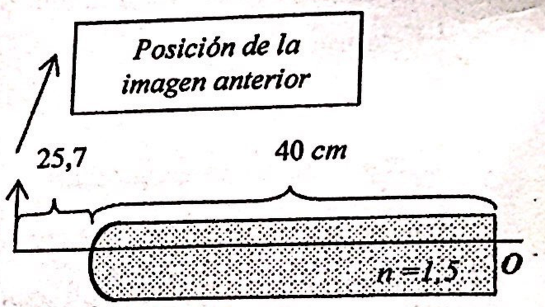
Luego de atravesar la primera dioptra, los rayos avanzan dentro del vidrio hasta alcanzar la cara plana de la varilla. Allí se produce una nueva refracción. Para esta refracción debemos hacer dos consideraciones:

① el objeto de esta refracción es la imagen de la primera. Pero atención: debemos me
desde el nuevo centro, es decir desde la cara plana.

② para la dioptra plana (como es esta cara) las fórmulas son la de las esféricas toman
$R = \infty$. Nos queda:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \underbrace{\frac{n_2 - n_1}{\infty}}_{0} \rightarrow \frac{n_2}{x'} = \frac{n_1}{x}$$

Y la del aumento no cambia.



Entonces la posición objeto debe ser la posición imagen anterior (25,7 cm a la izquierda de la primera cara), medida desde el nuevo origen. Por lo tanto, sumando el largo de la varilla:

$$x = 25{,}7\ cm + 40\ cm = 65{,}7\ cm$$

Observar también que ahora el medio del que incide la luz es desde el vidrio, y luego de
refractarse en la cara plana la luz emerge al aire: por lo tanto se intercambian los valores de
n_1 y n_2 (serán 1,5 y 1 respectivamente). Entonces:

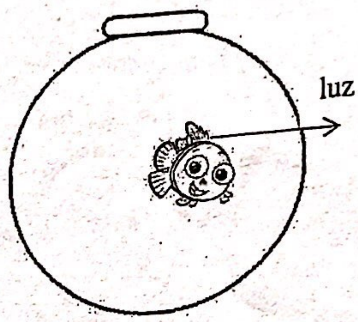
$$\frac{n_2}{x'} = \frac{n_1}{x} \xrightarrow{\text{reemplazo}} \frac{1}{x'} = \frac{1{,}5}{65{,}7\ cm} \xrightarrow{\text{despejo}} x' = 43{,}8\ cm$$

Nuevamente positivos, es decir a 43,8 cm a la izquierda de la cara plana dentro de la varilla de vidrio. El aumento en esta 2^da^ refracción vale:

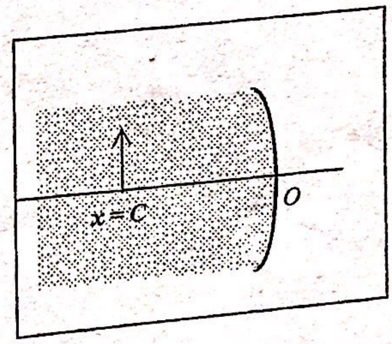
$$A = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 x'}{n_2 x} = \frac{1{,}5.(43{,}8\,cm)}{1.(65{,}7\,cm)} = 1$$

El aumento total, producido por las dos refracciones es el producto de cada uno de los hallados, por lo tanto en este caso coincide con el de la refracción en la dioptra esférica

12. Una pecera esférica, tal que el espesor del vidrio es despreciable, se llena con agua ($n = 1{,}33$) y contiene un pez tropical que nada justo por su centro. El radio de la pecera es de 34 cm. a) Encuentre la posición aparente del pez para un observador fuera de la pecera, y el aumento del pez. b) Suponiendo los rayos del Sol como un haz de rayos paralelos, que ingresa por la superficie lateral de la pecera, ¿en qué punto se concentrarán?, ¿lo harán sobre el pez y podrán dañarlo?



Consideremos la refracción de la luz que emite el objeto (el pez), en la superficie esférica de vidrio que separa el agua del aire. Tenemos entonces que el observador que se encuentra del lado derecho "ve" la imagen producida por esa refracción.



El modelo que representa entonces la situación anterior es el de un objeto ubicado a 34 cm del borde de la pecera (o sea justo en el centro).

Observar que la dioptra es cóncava para esta refracción (por lo tanto el radio es positivo), y que el índice del medio del que incide la luz es el del agua $n_1 = 1{,}33$ mientras que el del medio al que emerge la luz luego de refractarse es el del aire ($n = 1$).

En la fórmula de Descartes:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R} \xrightarrow{reemplazo} \frac{1}{x'} - \frac{1,33}{34\ cm} = \frac{1-1,33}{34\ cm} \xrightarrow{cuentas} x' = 34\,cm$$

Es decir el observador lo verá en el mismo lugar donde se encuentra. Y el aumento es:

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{n_1.x'}{n_2.x} = \frac{1,33.(34\,cm)}{1.(34\,cm)} = 1,33$$

Es decir, lo verá "derecho" y un poco más grande (un 33% más grande)

b) Para contestar esta pregunta, debemos considerar que por definición, si los rayos del Sol forman un haz que incide paralelo al eje, sus rayos se concentrarán entonces en el foco imagen f_i del sistema (ya que todos pasarán por ese punto, por definición de "foco imagen"). Pero para buscar el foco imagen hay que tener cuidado, ya que la luz viene desde el Sol (o sea el medio de incidencia n_1 es el aire), y por lo tanto, la cara de la dioptra pasa a ser convexa. Usando la expresión del foco imagen:

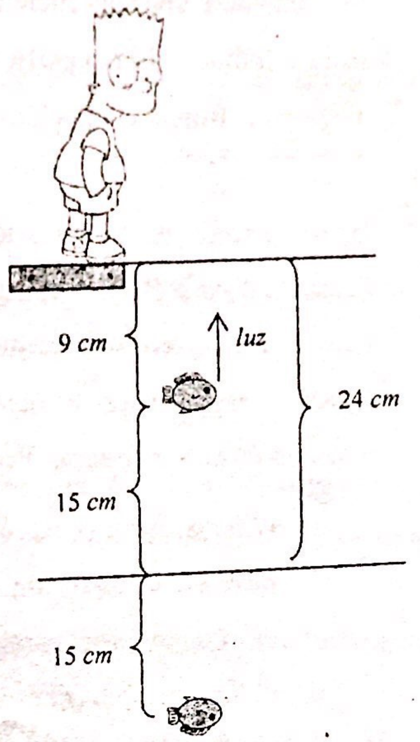
$$f_i = \frac{n_2.R}{n_2 - n_1} = \frac{1,33.(-34\ cm)}{(1,33-1)} = -137\ cm$$

Es decir, los rayos no se concentran dentro de la pecera (ya que esta distancia queda fuera de la misma), por lo tanto no podrían hacerle ningún daño al pez.

13. Un tanque tiene por fondo a un espejo plano. Contiene agua y su profundidad es 24 cm. Un pez se mantiene a 9 cm debajo de la superficie. a) ¿Cuál es la profundidad aparente del pez cuando se lo mira directamente desde arriba? b) ¿Cuál es la profundidad aparente de la imagen del pez, en el espejo, cuando se la mira directamente desde arriba?

El observador que mira desde arriba al pez, lo que en realidad "ve" es la imagen del pez dada por la refracción en la superficie del agua.

Así, vamos a plantear la imagen de un objeto (el pez) dada por una dioptra plana (la superficie agua-aire), donde la luz del objeto incide desde el agua (n_1 = 1,33) hacia el aire (n_2 = 1)



$$\frac{n_1}{x} = \frac{n_2}{x'} \xrightarrow{\text{reemplazo}} \frac{1{,}33}{9\ cm} = \frac{1}{x'}$$

$$\xrightarrow{\text{despejo}} x' = 6{,}77\ cm$$

Como vimos, el signo "+" nos indica que la imagen del objeto se forma del mismo lado que se encuentra el objeto (o sea el pez se lo ve debajo del agua, pero su posición aparente es esta imagen, por lo tanto parece más cerca de la superficie de lo que realmente está)

b) En el caso de mirar la imagen del pez que nos da el espejo plano del fondo del tanque recordemos que los espejos planos nos dan ***una imagen a la misma distancia del objeto al espejo, pero del otro lado del espejo***. Es decir, nuestro pez se encuentra a 24-9 = 15 *cm* por encima del espejo plano del fondo. Esto nos indica que el espejo da una imagen a 15 *cm* por debajo del espejo (como se muestra en el dibujo). Esta imagen se propaga por el agua y refracta en la dioptra plana agua-aire, donde forma una nueva imagen, que es la que observa la persona.

La distancia entre esta imagen y la superficie del agua es 15 + 24 = 39 *cm*. Entonces, usando esta posición como objeto de la refracción en la superficie del agua:

$$\frac{n_1}{x} = \frac{n_2}{x'} \xrightarrow{\text{reemplazo}} \frac{1{,}33}{39\ cm} = \frac{1}{x'} \xrightarrow{\text{despejo}} x' = 29{,}3\ cm$$

La interpretación del signo es la misma que en la parte a.

14. Considere una superficie refractora que separa dos medios con $n_1 > n_2$. Dé el signo de radio e indique si la superficie es cóncava o convexa cuando ésta es (a) convergente, (b) divergente. Repita el ejercicio para $n_1 < n_2$.

Una superficie de forma esférica donde la luz se refracta y cambia de medio se llama dioptra esférica. Para estas superficies usaremos la misma convención de signos que en el caso de los espejos, la luz incide desde la izquierda, el radio R es positivo si la dioptra es cóncava (es decir que el centro de la cara esférica se encuentra a la izquierda de O) y negativo en caso contrario. Para estas dioptras existen dos puntos focales:

- el foco objeto (f_o) es el punto sobre el eje principal que satisface que todo rayo que pasa en la dirección de este punto, se refracta emergiendo del otro lado de la dioptra en forma paralela al eje.
- el foco imagen (f_i) es el punto sobre el eje principal que satisface que todo rayo que incide sobre la dioptra en forma paralela al eje, emerge del otro lado de la misma pasando en la dirección del foco imagen.

Observación: Estos dos puntos coinciden en el caso de los espejos esféricos.

La fórmula de Descartes de las dioptras esféricas de radio R es:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad ; \qquad A = \frac{y'}{y} = \frac{n_1.x'}{n_2.x}$$

Para estas dioptras el foco objeto puede pensarse como la posición del objeto cuya imagen se forma en infinito ($x' = \infty$)

$$\overbrace{\frac{n_2}{\infty}}^{0} - \frac{n_1}{\underbrace{x}_{f_o}} = \frac{n_2 - n_1}{R} \rightarrow f_o = -\frac{n_1.R}{n_2 - n_1}$$

Mientras que el foco imagen es la posición imagen donde se forma la imagen de un objeto que se encuentra en infinito ($x = \infty$)

$$\frac{n_2}{x'} - \overbrace{\frac{n_1}{\infty}}^{0} = \frac{n_2 - n_1}{R} \rightarrow f_i = \frac{n_2.R}{n_2 - n_1}$$

En función de la expresión del foco objeto, la fórmula de Descartes también puede ser escrita como:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = -\frac{n_1}{f_o} \quad ó \quad \frac{n_1}{x} - \frac{n_2}{x'} = \frac{n_1}{f_o}$$

Que es bastante más parecida a la expresión análoga para los espejos esféricos.

Recordemos entonces que nuestra convención de signos dice que:

- un objeto es real si x es positiva
- una imagen es real si se forma por intersección directa de los rayos emergentes. Para eso tenemos que debe ser negativa (o sea, acá hay un cambio con respecto a los espejos)
- la dioptra es convergente si la distancia focal objeto es positiva, negativa en caso contrario.
- el radio R es positivo si C se encuentra a la izquierda de O (dioptra cóncava)

Para el trazado de rayos, los tres rayos principales que permiten obtener gráficamente la ubicación y características de la imagen son:

① todo rayo paralelo al eje, se refracta en la dioptra emergiendo en la dirección de la recta al foco imagen.

② todo rayo que incide en la dirección del foco objeto se refracta en la dioptra emergiendo en la dirección paralela al eje.

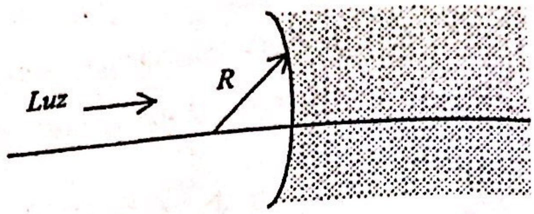
③ todo rayo que incide en la dirección del centro de curvatura C, se refracta sin desviarse.

Analicemos las situaciones que plantea el enunciado:

a) si la dioptra es convergente el signo de su foco objeto f_o debe ser positivo. Si además $n_1 > n_2$ entonces de la expresión del foco objeto, el divisor es negativo y para que todo el cociente sea positivo:

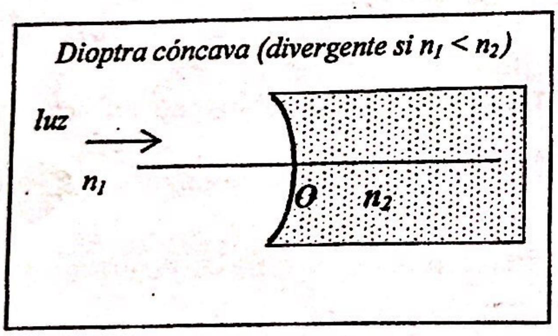
$$f_o = -\frac{n_1 . R}{\underbrace{n_2 - n_1}_{-}} > 0 \rightarrow R > 0$$

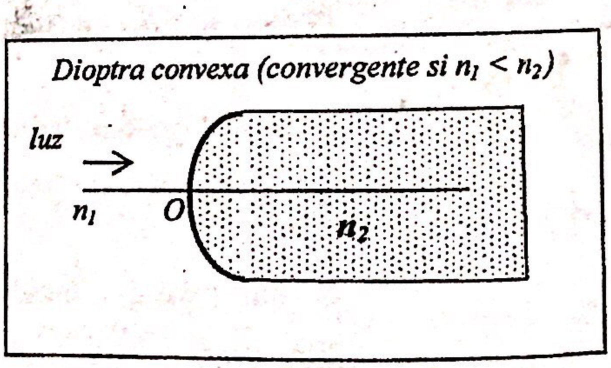
Por lo tanto el centro de curvatura debe quedar hacia el lado del que viene la luz (el sentido positivo, es decir la izquierda), por lo tanto coincide con la forma cóncava de los espejos.



b) Mientras que en el caso de las dioptras divergentes, como $f_o < 0$, se debe tener que esta vez el radio sea negativo, es decir esté ubicado el centro de curvatura a la derecha de O. Por lo tanto la curvatura debe ser convexa, es decir al revés del dibujo de la figura de arriba.

c) en el caso de que la relación de índices de refringencia se invierta, las dioptras se comportan al revés. En efecto, como es fácil de entender con los signos de la expresión de f_o, si ahora se cambia el signo del divisor, también debe cambiar el signo del radio para que el f_o de positivo (dioptra convergente) o negativo (dioptra divergente).





Recordar que la característica de ser "convergente" o "divergente" depende no sólo de la forma cóncava o convexa, también depende de la relación de los índices de refracción (cuál es el mayor).